Elementi di calcolo proposizionale

Proposizioni

- **Proposizione semplice** =
  complesso linguistico o segnico per il quale ha senso attribuire un valore di verità
- **Valore di verità** (principio di bivalenza)
  può essere ***vero V*** ***true T*** ***1***
  falso F ***false F*** ***0***
- **Esempio1** la_luna_è_verde_a_pallini_blu
- **Esempio2** A

Connettivi

- Le proposizioni si possono connettere fra loro a formare ***proposizioni composte***
- Il valore di verità della proposizione composta dipende dal tipo di ***connettivo*** e dal valore di verità delle proposizioni componenti
- I connettivi si distinguono dal numero di proposizioni (1, 2, … n) che possono connettere (***mono-, bi-, … n- argomentali***)
- L'effetto del connettivo si specifica elencando tutti i possibili casi di combinazioni di valori vero e falso delle proposizioni componenti

Connettivi monoargomentali

- La proposizione A può essere modificata in quattro modi diversi da un connettivo monoargomentale (quindi esistono solo 4 connettivi monoargomentali)

A		*c1a*	*c1b*	*c1c*	*c1d*
V		V	V	F	F
F		V	F	V	F

Connettivi monoargomentali

- c1a riporta valore costante V (non interessa)
- c1b non fa variare i valori di *A* (non interessa)
- c1d riporta valore costante F (non interessa)

- <u>c1c è interessante: cambia V in F e viceversa</u>

È la negazione
si indica con
not (non - ¬)

A		*c1a*	*c1b*	*c1c*	*c1d*
V		V	V	*F*	F
F		V	F	*V*	F

Connettivi monoargomentali:

not

- Il connettivo NOT nega il valore delle proposizioni

piove		***not*** piove
		not
V		F
F		V

Connettivi bi-argomentali

A	B		<u>V</u>	=A	=B	and	or	=	<	≤	<u>F</u>	≠A	≠B	nand	nor	≠	>	≥
V	V		V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	F		V	V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V		V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F		V	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V

- Alcuni sono banali: rimandano tutti V, tutti F, stessi valori di A o B, valori negati di A e B
- Altri sono parte fondamentale del nostro linguaggio

Connettivi bi-argomentali: and

- Corrisponde alla congiunzione italiana ***<u>e</u>*** **(• ∧)**
- Esempio: per andare a Parigi, debbo stare bene ***<u>e</u>*** debbo avere i soldi per viaggio, vitto ed alloggio

Sto_bene	Ho_i_soldi		Vado_a_Parigi
			AND
V	V		V
V	F		F
F	V		F
F	F		F

Connettivi bi-argomentali: or

- Corrisponde alla disgiunzione ***<u>o</u>*** **(+** ∨)
- Esempio: per essere promosso, debbo essere preparato ***<u>o</u>*** debbo essere raccomandato

essere_preparato	essere_raccomandato		essere_promosso
			OR
V	V		V
V	F		V
F	V		V
F	F		F

Connettivi bi-argomentali: < = > ≤ ≠ ≥

- Si usano anche con valori numerici
- Si ricordi la corrispondenza di "***F*** a ***0*** " e di "***V*** a ***1"***
- **=** corrisponde a "se e solo se" (↔)
  Es. sarò_promosso "se e solo se" imparerò_la_materia
- ≤ corrisponde ad "implica" (→)
  Es. essere_multiplo_di_10 "implica" essere_multiplo_di_2
- ≠ corrisponde alla ***<u>o</u>*** alternativa: o …. o …..
  Es. ***o*** ti_mangi_questa_minestra ***o*** ti_butti_dalla_finestra

Proposizioni composte

- Si valutano attribuendo valori di verità alle proposizioni semplici e applicando i connettivi
- L'ordine di applicazione dei connettivi rispecchia, a meno di parentesi "(", ")" la seguente gerarchia:

not
and
or
< = > ≤ ≠ ≥

- ***Es.:*** A vero e B falso   not B or (B and not A) = A
  ordine di applicazione   3 4   2   1   5
  risultati delle applicazioni   V V   F   F   **V**

Proposizioni composte

- Vediamo meglio il metodo che è lo stesso che per le espressioni aritmetiche: x + (y – z) / x

con ordine di applicazione   3   1   2

e con x = 5, y = 20, z = 10

x	+	(y	-	z)	/	x		passo
5	+	*(20*	-	*10)*	/	5		0
5	+	*10*			/	***5***		1
5	+	***2***						2
7								3

Proposizioni composte

- Vediamo meglio l'esempio precedente: ***A=V, B=F***

la proposizione not B or (B and not A) = A

con ordine di applicazione 3 4 2 1 5

not	B	or	(B	and	not	A)	=	A		passo
not	F	or	(F	and	**not**	***V)***	=	V		0
not	F	or	***(F***	***and***	***F)***		=	V		1
not	***F***	or	F				=	V		2
V		***or***	***F***				=	V		3
V							=	***V***		4
V										5

Tavola di verità

- Permette di valutare una proposizione composta per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuite alle proposizioni semplici
- ***Es.:*** la proposizione not B or (B and not A) = A

  con ordine di applicazione 3 4 2 1 5

not	B	or	(B	and	not	A)	=	A
F	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	F	F

Teorema o tautologia

- Proposizione composta che è vera per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuita alle sue proposizioni semplici
- Es. la prima legge di De Morgan

  not (A and B) = not A or not B

  2 1 6 3 5 4 ordine di esecuzione

not	(A	and	B)	=	not	A	or	not	B
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F

Contraddizione

- Proposizione composta che è falsa per qualsiasi combinazione di valori di verità attribuita alle sue proposizioni semplici
- Es. (A < B) = (A ≥ B)

  1 3 2 ordine di esecuzione

(A	<	B)	=	(A	≥	B)
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F

Connettivi tri-, .. , n- argomentali

- BASTA, non se ne può più !
- Ma come descrivere situazioni più complesse in cui non sia intuitivo l'uso dei connettivi studiati?
- Sono sufficienti opportune combinazioni di ***not*** ***and*** ***or*** per esprimere un qualsiasi connettivo!
- Es.

A	>	B		A	and	not	B
V	F	V		V	F	F	V
V	V	F		V	V	V	F
F	F	V		F	F	F	V
F	F	F		F	F	V	F

Forme disgiuntive normali

- Utilizzano solo ***not*** ***and*** ***or*** per descrivere risultati dipendenti da valori di verità di proposizioni semplici
- Ci si riferisce alla tavola di verità in cui appaiono tutte le possibili assegnazioni di verità delle proposizioni semplici
- Si considerano le combinazioni per le quali si ottiene valore di verità V
- Per ogni tale combinazione le proposizioni con valore di verità F si fanno precedere da ***not***
- Le proposizioni così modificate vengono fra loro connesse con ***and*** (si creano congiunzioni)
- Tali congiunzioni vengono fra loro connesse con ***or*** , formando una forma disgiuntiva normale

Forme disgiuntive normali

- Es. A=B

A	B		=		
V	V		V	*	A and B
V	F		F		
F	V		F		
F	F		V	*	not A and not B

- Risultato: (A and B) or (not A and not B)

Forme disgiuntive normali

- Esercizio: condizione di presa nella briscola per il giocatore che tira per primo (G1)
- Proposizioni che definiscono la condizione:
  * i semi sono uguali (SU)
  * il secondo giocatore ha tirato una briscola (B2)
  * il valore della carta del I giocatore è maggiore del valore della carta del II giocatore (M1)

Forme disgiuntive normali

- Condizione di presa nella briscola per il primo giocatore

SU	B2	M1		G1
V	V	V		V
V	V	F		F
V	F	V		V
V	F	F		F
F	V	V		F
F	V	F		F
F	F	V		V
F	F	F		V

- **G1 = (SU and B2 and M1) or (SU and not B2 and M1) or (not SU and not B2 and M1) or (not SU and not B2 and not M1)**